导学案

主编 肖德好

全品学练考

高中数学

选择性必修第一册 RJA

细分课时
分层设计
落实基础
突出重点

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

03 第三章　圆锥曲线的方程

PART THREE

导学案 第一章　空间向量与立体几何

LEARN

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其线性运算

【学习目标】

1. 类比平面向量，能直接获得空间向量的概念，以及零向量、单位向量、相反向量、共线向量、相等向量的概念.

2. 结合立体几何与空间向量的特征，知道共面向量的概念.

3. 在平面向量的基础上，能应用平行四边形法则和三角形法则进行空间向量的加减运算.

4. 类比平面向量，能进行空间向量的数乘运算.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　空间向量及有关概念

1. 在空间，把具有________和________的量叫作空间向量，空间向量的大小叫作空间向量的________或________.

空间向量用字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示，也用有向线段表示，有向线段的________表示空间向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为________或________.

2. 几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
零向量	规定长度为 0 的向量叫作________，记为 $\mathbf{0}$
单位向量	________的向量叫作单位向量
相反向量	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度______而方向________的向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记为________
共线向量	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线________________，那么这些向量叫作共线向量或平行向量. 规定：零向量与任意向量________，即对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\mathbf{0}$______$\boldsymbol{a}$
相等向量	方向________且模________的向量叫作相等向量. 在空间，________且________的有向线段表示同一向量或相等向量

【诊断分析】判断正误.（请在括号中打“√”或“×”）

(1)零向量是没有方向的.　(　　)

(2)两个有共同起点且相等的向量，其终点必相同.　(　　)

(3)空间中方向相反的两个向量是相反向量.　(　　)

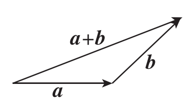
(4)平面内所有单位向量都是相等的.　(　　)

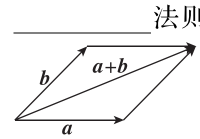
◆ 知识点二　空间向量的线性运算

1. 空间向量的自由性

任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，这样任意两个________的运算就可以转化为________的运算.

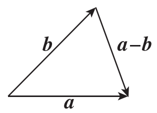
2. 空间向量的线性运算

<table>
<tr><th>运算</th><th>定义</th><th>法则
（或几何意义）</th><th>运算律</th></tr>
<tr><td>加法</td><td>求两个向量________的运算</td><td>

________法则


________法则</td><td>(1) 加法交换律：
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________；
(2) 加法结合律：
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$________</td></tr>
</table>

（续表）

运算	定义	法则（或几何意义）	运算律
减法	减去一个向量相当于加上这个向量的________	__________法则	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$__________
数乘	实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个______，这种运算叫作向量的________，记作______	(1)$\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=$____. (2)当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向________；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向________；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}=$________	(1)对向量加法的分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$__________； (2)对实数加法的分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=$__________

【诊断分析】1. 判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.（　）

(2)有限个向量求和，交换相加向量的顺序，其和不变.（　）

(3)若$\lambda\in\mathbf{R}$，则$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.（　）

2. 空间向量的加、减法运算与平面向量的加、减法运算是否相同？平面向量加、减法的运算律在空间向量中还适用吗？

◆ 知识点三　空间向量共线与共面的充要条件

1. 空间两向量共线的充要条件

对任意两个空间向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$的充要条件是存在实数$\lambda$，使________.

2. 空间直线的确定

(1)直线的方向向量的定义

在直线l上取__________，把与向量$\boldsymbol{a}$________的非零向量称为直线l的方向向量.

(2)空间直线的确定

空间直线可以由其上一点和它的__________确定.

3. 共面向量的定义

(1)向量与直线平行

如果表示向量$\boldsymbol{a}$的有向线段$\overrightarrow{OA}$所在的直线OA与直线l______或________，那么称向量$\boldsymbol{a}$平行于直线l.

(2)向量与平面平行

如果表示向量$\boldsymbol{a}$的有向线段$\overrightarrow{OA}$所在的直线OA______________或______________，那么称向量$\boldsymbol{a}$平行于平面α.

(3)共面向量

平行于同一个平面的向量，叫作____________.

4. 共面向量定理

如果两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，那么向量$\boldsymbol{p}$与向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共面的充要条件是存在唯一的有序实数对(x,y)，使__________.

【诊断分析】判断正误.（请在括号中打"√"或"×"）

(1)对于向量$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若存在x，$y\in\mathbf{R}$，使得$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$成立，则向量$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共面.（　）

(2)若向量$\boldsymbol{p}$与向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共面，则存在x，$y\in\mathbf{R}$，使得$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$成立.（　）

(3)若$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，则$P$，$M$，$A$，$B$共面.（　）

(4)若P，M，A，B共面，则$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.（　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的有关概念及应用

例1 (1)（多选题）给出下列四个说法，其中正确的是（　）

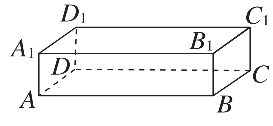
A. 若两个空间向量相等，则它们的起点相同，终点也相同

B. 若空间向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\boldsymbol{b}\rvert$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

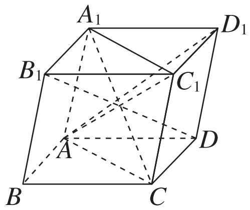
C. 在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，必有$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$

D. 若空间向量$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{p}$满足$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}$，则$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{p}$

(2)如图所示，在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=4$，$AD=2$，$AA_1=1$，以该长方体八个顶点中的两点为起点和终点的向量中，单位向量共有________个，模为$\sqrt{5}$的所有向量为______________________________.



变式 (多选题)在如图所示的平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,下列各对向量是相反向量的是 ( )



A. $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$

B. $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$

C. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$

D. $\overrightarrow{CC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1A}$

[素养小结]

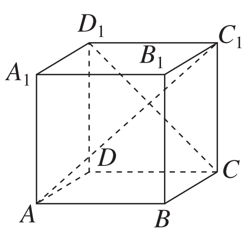
解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点:

(1)关键点:紧紧抓住向量的两个要素,即大小和方向.

(2)注意点:①零向量不是没有方向,它的方向是任意的.②单位向量的方向虽然不一定相同,但它们的长度都是1.③两个向量的模相等,不一定是相等向量;反之,若两个向量相等,则它们不仅模相等,而且方向相同.若两个向量的模相等,方向相反,则它们为相反向量.

◆ 探究点二　空间向量的线性运算

例2 (1)(多选题)如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,下列各式中运算结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有 ( )



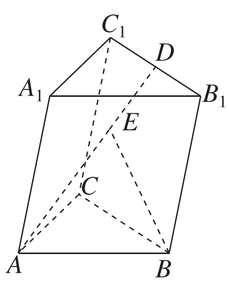
A. $(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{CC_1}$

B. $(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1})+\overrightarrow{D_1C_1}$

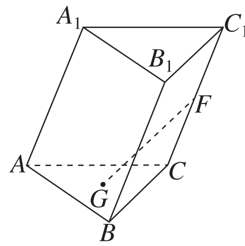
C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{D_1C}$

D. $(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+\overrightarrow{B_1C_1}$

(2)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D 是棱 B_1C_1 的中点,$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$.设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BE}$.



变式 (1)[2024·武汉二中月考] 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,F 是 CC_1 的中点,G 为△ABC 的重心,则 $\overrightarrow{GF}=$ ( )



A. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

(2)若 A,B,C,D 为空间中不同的四个点,则下列各式中运算结果不一定为零向量的是 ( )

A. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$

B. $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$

[素养小结]

利用三角形法则和平行四边形法则进行向量的加法运算时,务必要注意和向量的方向,必要时可对空间向量自由平移进而获得更准确的结果.

◆ 探究点三　空间向量的共线、共面问题

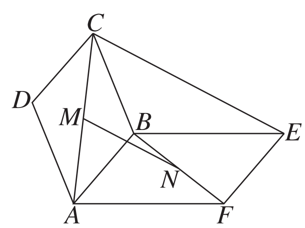
例3 (1)已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,则一定共线的三个点是 ( )

A. A,B,D　　B. A,B,C

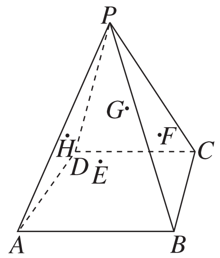
C. B,C,D　　D. A,C,D

(2)若非零空间向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,则使 $2k\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+2(k+1)\boldsymbol{e}_2$ 共线的 k 的值为________.

变式 如图所示,四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABEF$ 都是平行四边形且不共面,M,N 分别是 AC,BF 的中点,判断 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 是否共线.



例 4 如图,已知 P 是平面四边形 $ABCD$ 所在平面外一点,连接 PA,PB,PC,PD,点 E,F,G,H 分别为$\triangle PAB$,$\triangle PBC$,$\triangle PCD$,$\triangle PDA$ 的重心,求证:E,F,G,H 四点共面.



变式 已知 A,B,C 三点不共线,点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

(1)$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 三个向量是否共面?

(2)点 M 是否在平面 ABC 内?

[素养小结]

(1)证明空间向量共线的方法:证明空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的关键是利用已知条件找到实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 成立,在做题时要运用空间向量的运算法则,结合空间图形,化简得出 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,从而得出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(2)证明空间三点共线的思路:对于空间三点 P,A,B,可通过证明下列结论来证明 P,A,B 三点共线.

①存在实数 λ,使 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 成立.

②对空间任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

(3)证明空间三向量共面的方法:证明其中一个向量可以表示成另两个向量的线性组合,即若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ $(x,y\in\mathbf{R})$,则向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

(4)证明空间四点共面的思路:对于空间四点 P,M,A,B,可通过证明下列结论来证明 P,M,A,B 四点共面.

①存在实数 x,y,使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$ 成立;

②对空间任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}(x,y\in\mathbf{R})$;

③对空间任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$.

1.1.2 空间向量的数量积运算

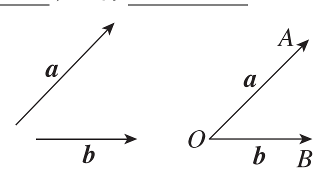
【学习目标】

1. 结合立体几何与空间向量的特征,知道投影向量的概念.
2. 类比平面向量,能进行空间向量的数量积运算.
3. 类比平面向量并借助空间图形,知道空间向量的有关运算律,能运用数量积解决空间中的垂直、夹角及距离问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间向量的夹角

1. 概念:如图,已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\angle AOB$ 叫作向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的________,记作________.



2. 夹角的取值范围:$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的取值范围是________,其中当$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向________;当$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向______;当$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$________. 反之,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 π;若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角. ( )

(2)若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 α，则直线 AB 与 CD 所成的角也为 α.（　）

◆ 知识点二　数量积的相关概念及性质

1. 概念：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则____________叫作 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$____________.

特别地，零向量与任意向量的数量积为 0.

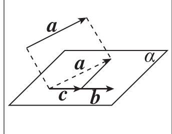
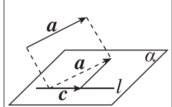
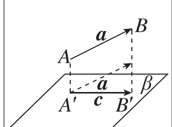
2. 空间向量数量积的性质

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

(2)$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=$________.

(3)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$____________.

3. 投影向量的概念

<table>
<tr><th></th><th>作法</th><th>图形表示</th><th>符号表示</th></tr>
<tr><td>向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量</td><td rowspan="2">将向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$(直线 l)平移到同一个平面 α 内，利用平面上向量的投影，得到与向量 $\boldsymbol{b}$(直线 l 的方向向量)共线的向量 $\boldsymbol{c}$</td><td></td><td rowspan="2">$\boldsymbol{c}=$____________</td></tr>
<tr><td>向量 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上的投影向量</td><td></td></tr>
<tr><td>向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面 β 上的投影向量</td><td>分别由向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线，垂足分别为 A'，B'，得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$</td><td></td><td>$\overrightarrow{A'B'}$</td></tr>
</table>

注：向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 $\boldsymbol{a}$ 所在直线与平面 β 所成的角.

4. 空间向量数量积的运算律

(1)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=$________，$\lambda\in\mathbf{R}$.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________(交换律).

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$________(分配律).

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.（　）

(2)对于非零向量 $\boldsymbol{b}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.（　）

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是钝角.（　）

(4)已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 120° 的两个单位向量，则向量 $\boldsymbol{e}_1$ 在向量 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$.（　）

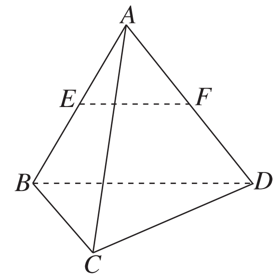
课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的数量积运算

例 1 如图所示，在棱长为 1 的正四面体 A-BCD 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点，求：

(1)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}$；(2)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}$；(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}$；(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.



变式 (1)(多选题)设正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则有（　）

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C_1A}=-a^2$　　B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=\sqrt{2}a^2$

C. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1D}=a^2$　　D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=a^2$

(2)正四面体 P-ABC 的棱长为 2，点 D 是 $\triangle PAB$ 的重心，则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

[素养小结]

(1)空间向量数量积运算的两种方法：

①已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，直接代入数量积公式计算.

②如果要求的是关于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的多项式形式的数量积，可以先利用数量积的运算律将多项式展开，再利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 及数量积公式进行计算.

(2)在几何体中求空间向量数量积的步骤：

①首先将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式.

②利用向量的运算律将数量积展开，转化为已知模和夹角的向量的数量积.

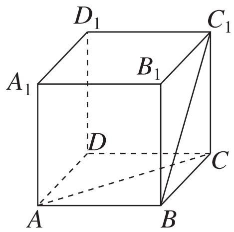
③代入 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 求解.

◆ 探究点二　利用向量的数量积解决夹角问题

例 2　如图所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中.

(1)求 $\overrightarrow{BC_1}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角;

(2)求异面直线 BC_1 与 CA 所成角的大小.



变式 (1)已知 a,b 是异面直线,$A,B\in a$,$C,D\in b$,$AC\perp b$,$BD\perp b$,且 $AB=2$,$CD=1$,则 a 与 b 所成的角是 (　　)

A. $30°$　　B. $45°$

C. $60°$　　D. $90°$

(2)已知 $BB_1\perp$平面 ABC,且$\triangle ABC$ 是以 AC 为底边的等腰直角三角形,$\square ABB_1A_1$ 和$\square BB_1C_1C$ 的对角线都分别相互垂直,求异面直线 BA_1 与 AC 所成角的大小.

[素养小结]

(1)求两个空间向量的夹角的两种方法:

①结合图形,平移向量,利用空间向量的夹角定义来求,但要注意向量夹角的范围.

②先求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,再利用公式 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,最后确定$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

(2)用向量法求两直线的夹角:

①取向量:在两直线上分别取方向向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$;

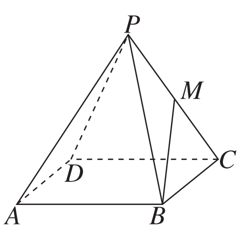
②运算:求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$;

③结论:设两直线的夹角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$,进而得到 θ.

◆ 探究点三　利用向量的数量积解决长度问题

例 3　已知线段 AB 在平面 α 内,线段 $AC\perp\alpha$,线段 $BD\perp AB$,且与 α 所成的角是 $30°$,如果 $AB=a$,$AC=BD=b$,求 C,D 间的距离.

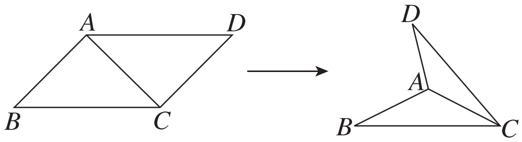
变式 (1)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 PA 的长为 2,且 PA 与 AB,AD 的夹角都是 $60°$,若 M 是 PC 的中点,则 $|\overrightarrow{BM}|=$ (　　)



A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$

C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=AC=1$,$\angle ACD=90^\circ$,沿着它的对角线 AC 将$\triangle ACD$ 折起,使 AB 与 CD 所成的角为 60°,求此时 B,D 间的距离.



[素养小结]

求两点间的距离或线段的长度的步骤:

(1)将两点间的连线(或此线段)用向量表示;

(2)用其他已知夹角和模的向量表示该向量;

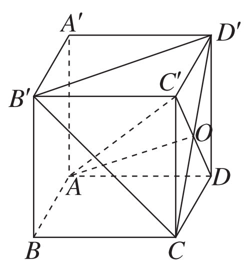
(3)利用 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$,计算出 $|\boldsymbol{a}|$,即得所求距离或长度.

◆ 探究点四 利用空间向量的数量积判断或证明垂直问题

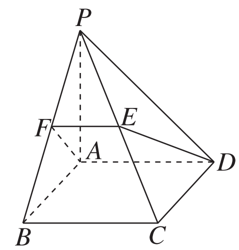
例 4 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,CD' 与 DC' 相交于点 O,求证:

(1)$AO\perp CD'$;

(2)$AC'\perp$平面 $B'CD'$.



变式 如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为正方形,$AP=AB$,F,E 分别是 PB,PC 的中点. 证明:平面 $PBC\perp$平面 $ADEF$.



拓展 写出命题"如果平面内的一条直线和这个平面的一条斜线在这个平面上的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直"的逆命题,判断逆命题的真假,并用向量法证明.

1.2 空间向量基本定理

【学习目标】

1. 在平面向量基本定理的基础上，能借助投影进行向量分解，知道空间向量基本定理.
2. 知道基底、单位正交基底，并能在选定基底下进行向量的表示及运算.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　空间向量基本定理

1. 分向量

如果 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是空间三个________的向量，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x,y,z)，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 称__________分别为向量 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 上的分向量.

2. 空间向量基本定理

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$________，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在________的有序实数组 (x,y,z)，使得______________.

我们把 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫作空间的一个________，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都叫作________. 空间任意三个________的向量都可以构成空间的一个基底.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)空间中的任何一个向量都可以用三个给定的向量表示.　(　)

(2)若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 全不是零向量.　(　)

(3)若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间的一个基底，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线.　(　)

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底.　(　)

◆ 知识点二　空间向量正交分解

1. 单位正交基底

如果空间的一个基底中的三个基向量________，且长度都为________，那么这个基底叫作单位正交基底，常用________表示.

2. 空间向量的正交分解

把一个空间向量分解为三个__________的向量，叫作把空间向量进行正交分解.

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的基底

例 1 (1)已知 M,A,B,C 为空间的四个点，且任意三点不共线，O 为空间中一点，下列可能使 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 构成空间的一个基底的关系式是　(　)

A. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

C. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

(2)已知 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是空间的一个基底，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，试判断 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 能否构成空间的一个基底.

变式 (1)(多选题)设 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$，则下列向量可以构成空间的一个基底的是　(　)

A. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}$　　B. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$

C. $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{z}$　　D. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

(2)已知空间四点 O,A,B,C,若$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$是空间的一个基底,则下列说法不正确的是　(　　)

A. O,A,B,C 四点不共线

B. O,A,B,C 四点共面,但不共线

C. O,A,B,C 四点不共面

D. O,A,B,C 四点中任意三点不共线

[素养小结]

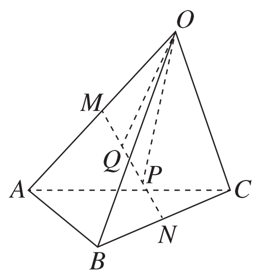
基底的判断思路:判断给出的三个向量能否构成基底,关键是要判断这三个向量是否共面.首先应考虑三个向量中是否有零向量,其次判断三个非零向量是否共面.如果从正面难以入手判断,可假设三个向量共面,利用向量共面的充要条件建立方程,若方程的解唯一,则三个向量共面;否则,三个向量不共面.

◆ 探究点二　用基底表示空间向量

例 2　如图所示,在四面体 $O\text{-}ABC$ 中,M,N 分别是OA,BC 的中点,P,Q 是MN 的两个三等分点(点 P 靠近点 N,点 Q 靠近点M).

(1)用基底$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$表示向量 $\overrightarrow{OP}$;

(2)若 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,求实数 x,y,z 的值.



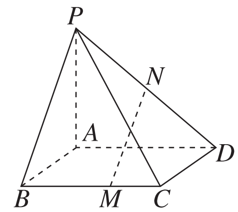
变式　(1)如图所示,已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形,M,N 分别为棱 BC,PD 上的点,$CM=\frac{1}{2}BM$,N 是 PD 的中点,若向量 $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AP}$,则　(　　)

A. $x=\frac{1}{3},y=-\frac{1}{2}$

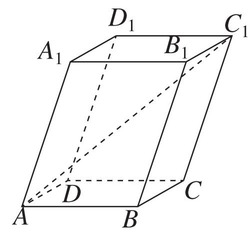
B. $x=-\frac{1}{6},y=\frac{1}{2}$

C. $x=-\frac{1}{3},y=\frac{1}{2}$

D. $x=\frac{1}{6},y=-\frac{1}{2}$



(2)[2024·广东东莞高二期中]　如图,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,$AA_1=2$,$\angle A_1AB=\angle A_1AD=60°$.设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AC_1}$,并求$|\overrightarrow{AC_1}|$.



[素养小结]

用基底表示向量的步骤:

(1)定基底:根据已知条件,确定三个不共面的向量构成空间的一个基底.

(2)找目标:用确定的基底(或已知基底)表示目标向量,需要根据三角形法则及平行四边形法则,结合相等向量的代换、向量的运算进行变形、化简,最后求出结果.

(3)下结论:利用空间的一个基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可以表示出空间所有向量.表示要彻底,结果中只能含有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,不能含有其他形式的向量.

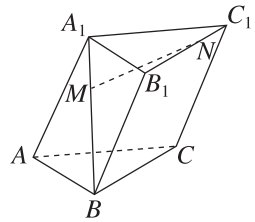
◆ 探究点三　空间向量基本定理的应用

角度一　垂直平行关系的证明

例 3　如图所示,在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,M,N 分别是 A_1B,B_1C_1 上的点,且 $BM=2MA_1$,$B_1N=2NC_1$.用空间向量解决如下问题:

(1)若 $\angle BAA_1=\angle CAA_1$,$AB=AC$,证明:$BC\perp AA_1$;

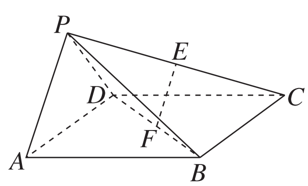
(2)证明:$MN//$平面 ACC_1A_1.



变式　在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$,且 $PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$,若 E,F 分别为 PC,BD 的中点,用向量方法证明:

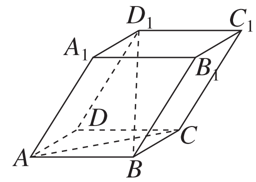
(1)$EF//$平面 PAD;

(2)$EF\perp$平面 PCD.



角度二　求两直线的夹角

例 4　如图,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,以顶点 A 为端点的三条棱的长度都为 1,且两两夹角为 $60°$,求 BD_1 与 AC 所成角的余弦值.



变式　已知正四面体 $A\text{-}BCD$ 的棱长为 1,E,F 分别是 BC,AD 的中点.

(1)证明:$EF\perp BC$;

(2)求异面直线 AE 与 CD 所成角的余弦值.

[素养小结]
用空间向量基本定理解决立体几何问题的步骤:首先根据已知条件,确定三个不共面的向量构成空间的一个基底,如果存在三个两两垂直的空间向量,那么可以确定一个单位正交基底;然后根据三角形法则及平行四边形法则,结合相等向量的代换、向量的运算用确定的基底(或已知基底)表示目标向量;最后把空间向量的运算转化为基向量的运算.涉及异面直线所成的角时,可用已知向量代入公式$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right|$求解,其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$用基向量表示.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1 空间直角坐标系

【学习目标】

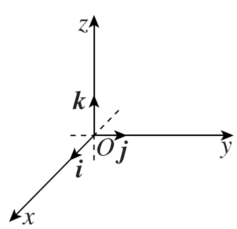
1. 在空间向量基本定理的基础上,知道空间直角坐标系的概念.
2. 结合简单几何体,能写出有关点和向量的坐标.

课前预习　知识导学 素养初识

◆ 知识点一 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

定义:如图,在空间选定一点O和一个单位正交基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.以点$O$为原点,分别以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴:x轴、y轴、z轴,它们都叫作________.这时我们就建立了一个空间直角坐标系$Oxyz$,O叫作________,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$都叫作________,通过每两条坐标轴的平面叫作________,分别称为Oxy平面,Oyz平面,Ozx平面.



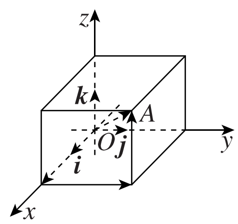
2. 空间直角坐标系的画法

(1)空间直角坐标系的画法:画空间直角坐标系$Oxyz$时,一般使$\angle xOy=$________________,$\angle yOz=$________.

(2)右手直角坐标系:在空间直角坐标系中,让右手拇指指向x轴的正方向,食指指向y轴的正方向,如果中指指向____________,则称这个坐标系为右手直角坐标系.

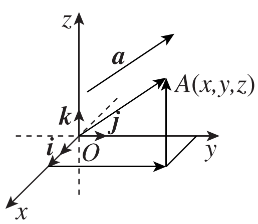
◆ 知识点二 空间向量的坐标

1. 空间中点的坐标



如图,由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组(x,y,z),使$\overrightarrow{OA}=$____________.在单位正交基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下与向量$\overrightarrow{OA}$对应的有序实数组$(x,y,z)$,叫作点$A$在空间直角坐标系中的坐标,记作____________,其中x叫作点A的横坐标,y叫作点A的纵坐标,z叫作点A的竖坐标.

2. 空间中向量的坐标



如图,在空间直角坐标系$Oxyz$中,给定向量$\boldsymbol{a}$,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组$(x,y,z)$,使$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.有序实数组________叫作$\boldsymbol{a}$在空间直角坐标系$Oxyz$中的坐标,可简记作____________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)(x,y,z)既可以表示向量,也可以表示点.(　　)

(2)点$(2,0,3)$在空间直角坐标系中的y轴上.(　　)

(3)点$(0,0,3)$在空间直角坐标系中的Oxy平面上.(　　)

(4)已知$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别是空间直角坐标系$Oxyz$中$x$轴、$y$轴、$z$轴的正方向上的单位向量,且$\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,则点$B$的坐标一定是$(-1,1,-1)$.(　　)

课中探究

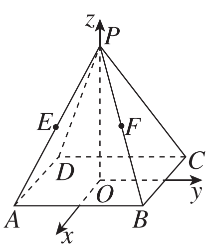
考点探究　素养小结

◆ 探究点一　求空间点的坐标

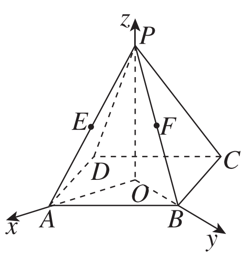
例1 已知在正四棱锥 P-$ABCD$ 中,O 为底面中心,底面边长和高都是 2,E,F 分别是侧棱 PA,PB 的中点.

(1)如图①,以 O 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,写出点 A,B,C,D,P,E,F 的坐标;

(2)如图②,以 O 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,写出点 A,B,C,D,P,E,F 的坐标.



①



②

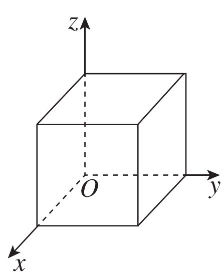
变式 (1)(多选题)在棱长为 1 的正方体中,建立如图所示的空间直角坐标系,则下列各点在正方体内或正方体表面上的是　　(　　)

A. $(1,0,1)$

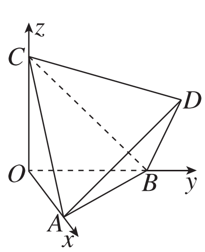
B. $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$

C. $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

D. $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$



(2)如图,棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 A-BCD 的三个顶点 A,B,C 分别在空间直角坐标系的 x,y,z 轴的正半轴上,则顶点 D 的坐标为　　(　　)



A. $(1,1,1)$　　B. $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$

C. $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$　　D. $(2,2,2)$

[素养小结]

(1)建立空间直角坐标系时应遵循的两个原则:①让尽可能多的点落在坐标轴上或坐标平面内;②充分利用几何图形的对称性.

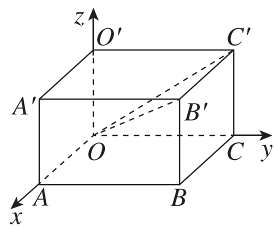
(2)求某点 M 的坐标的方法:作 MM' 垂直于平面 Oxy,垂足为 M',求 M' 的横坐标 x,纵坐标 y,即点 M 的横坐标 x,纵坐标 y,再求点 M 在 z 轴上射影的竖坐标 z,即为点 M 的竖坐标 z,于是得到点 M 的坐标(x,y,z).

◆ 探究点二　求空间向量的坐标

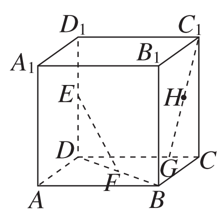
例2 如图,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有一长方体 $OABC$-$O'A'B'C'$,且 $OA=6$,$OC=8$,$OO'=5$.

(1)写出点 B' 的坐标,并将 $\overrightarrow{OB'}$ 用单位正交基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 表示;

(2)求 $\overrightarrow{OC'}$ 的坐标.

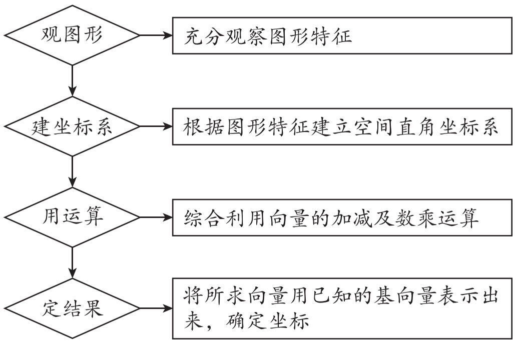


变式 如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 D_1D,BD 的中点,G 在棱 CD 上,且 $CG=\frac{1}{4}CD$,H 为 C_1G 的中点.建立适当的空间直角坐标系,写出 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{GH}$ 的坐标.



［素养小结］

用坐标表示空间向量的步骤：



◆ **探究点三　空间中点的对称问题**

例3　在空间直角坐标系中，点 $P(-2,1,4)$.

(1)求点 P 关于 x 轴的对称点 P_1 的坐标；

(2)求点 P 关于 Oxy 平面的对称点 P_2 的坐标；

(3)求点 P 关于点 $M(2,-1,-4)$ 的对称点 P_3 的坐标.

变式　关于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点 $P(1,2,3)$，有下列说法：①$\overrightarrow{OP}$ 的坐标为 $(1,2,3)$；②点 P 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(-1,-2,-3)$；③点 P 关于原点对称的点的坐标为 $(1,2,-3)$；④点 P 关于 Oxy 平面对称的点的坐标为 $(1,2,-3)$. 其中正确说法的个数是　　(　　)

A. 1　　　B. 2

C. 3　　　D. 4

［素养小结］

在空间直角坐标系中，点 $P(x,y,z)$ 关于坐标轴和坐标平面的对称点的坐标特点如下：

(1)关于坐标原点的对称点的坐标为 $(-x,-y,-z)$；

(2)关于横轴(x 轴)的对称点的坐标为 $(x,-y,-z)$；

(3)关于纵轴(y 轴)的对称点的坐标为 $(-x,y,-z)$；

(4)关于竖轴(z 轴)的对称点的坐标为 $(-x,-y,z)$；

(5)关于 Oxy 平面的对称点的坐标为 $(x,y,-z)$；

(6)关于 Oyz 平面的对称点的坐标为 $(-x,y,z)$；

(7)关于 Ozx 平面的对称点的坐标为 $(x,-y,z)$.

其中的记忆方法为“关于谁谁不变，其余的相反”. 如关于横轴(x 轴)的对称点，横坐标不变，纵坐标、竖坐标变为原来的相反数；关于 Oxy 平面的对称点，横坐标、纵坐标不变，竖坐标变为原来的相反数.

1.3.2　空间向量运算的坐标表示

【学习目标】

1. 类比平面向量，知道空间向量及其运算的坐标表示.
2. 基于运算，能探究空间向量模的坐标公式、空间两点间的距离公式.
3. 类比平面向量，知道空间向量平行、垂直、夹角的坐标表示.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ **知识点一　空间向量运算的坐标表示**

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$____________
减法	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$____________
数乘	$\lambda\boldsymbol{a}=$____________，$\lambda\in\mathbf{R}$
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$____________

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,2,0)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-3,1,-2)$.　　(　　)

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,3)$，$\boldsymbol{c}=(4,-1,-3)$，则向量 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ 的坐标为 $(16,0,-19)$.　　(　　)

◆ 知识点二　空间向量运算的坐标表示的应用

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

共线	$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________$\Leftrightarrow$____________________($\lambda\in\mathbf{R}$)
垂直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________$\Leftrightarrow$____________________
向量长度	$\|\boldsymbol{a}\|=$________$=$__________
向量夹角公式	$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________$=$______________
空间两点间的距离公式	设 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$是空间中任意两点,$O$ 为坐标原点,则 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=$________________,$P_1P_2=\|$________$\|=$____________________.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)在空间直角坐标系中,向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标与终点 B 的坐标相同.　(　　)

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.　(　　)

(3)若四边形 $ABCD$ 是平行四边形,则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的坐标相同.　(　　)

(4)已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的坐标运算

例 1　已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2),\boldsymbol{b}=(0,-1,4)$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},2\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

变式　(1)(多选题)[2024·福州六校高二期中]已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2),\boldsymbol{b}=(6,-3,2)$,则下列结论正确的是　(　　)

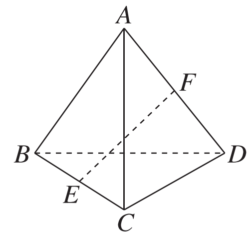
A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7,-1,4)$

B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-5,-1,0)$

C. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$

D. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$

(2)如图,在四面体 A-BCD 中,若向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,5,2),\overrightarrow{CD}=(-7,-1,-4)$,$E,F$ 分别为 BC,AD 的中点,则 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标为　(　　)



A. $(2,3,3)$

B. $(-2,-3,-3)$

C. $(5,-2,1)$

D. $(-5,2,-1)$

◆ 探究点二　空间向量平行、垂直的坐标表示及应用

例 2　已知空间三点 $A(-2,0,2),B(-1,1,2),C(-3,0,4)$.设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

(1)若$|\boldsymbol{c}|=3,\boldsymbol{c}/\!/\overrightarrow{BC}$,求 $\boldsymbol{c}$;

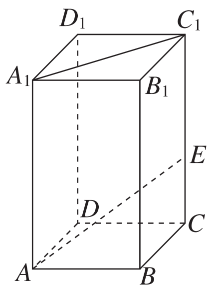
(2)若 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 互相垂直,求 k.

变式　(1)设 $x,y\in\mathbf{R}$,向量 $\boldsymbol{a}=(x,1,0),\boldsymbol{b}=(2,y,2),\boldsymbol{c}=(1,-2,1)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$　(　　)

A. $\sqrt{14}$　　B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{7}$

(2)如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC$,E 是侧棱 CC_1 上的任意一点,在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 P,使得 D_1P 总垂直于 AE?请说明理由.



[素养小结]

利用空间向量证明垂直、平行的一般步骤:

(1)建立空间直角坐标系,建系时要尽可能地利用条件中的垂直关系.

(2)建立空间图形与空间向量之间的关系,用空间向量表示出问题中所涉及的点、直线、平面的要素.

(3)通过空间向量的运算求出直线的方向向量,再研究平行、垂直关系.

(4)根据运算结果解释相关问题.

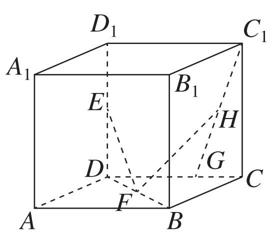
◆ 探究点三 利用空间向量的坐标运算求夹角及长度

例 3 如图,在棱长为 2 的正方体中,E,F 分别是 DD_1,DB 的中点,G 在棱 CD 上,且 $CG=\frac{1}{3}CD$,H 是 C_1G 的中点. 建立适当的空间直角坐标系,解决下列问题.

(1)求证:$EF\perp B_1C$;

(2)求 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{C_1G}\rangle$;

(3)求 FH 的长.

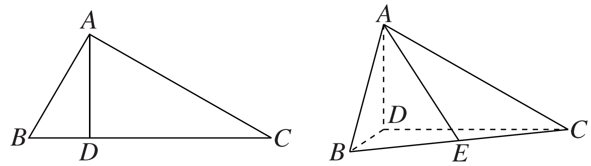


变式 1 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,3,1)$,$\boldsymbol{b}=\left(-2,t,-\frac{2}{5}\right)$,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,则实数 t 的取值范围是__________________.

变式 2 如图①所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=60°$,$\angle BAC=90°$,AD 是 BC 边上的高,沿 AD 把 $\triangle ABD$ 折起,使 $\angle BDC=90°$,得到如图②所示的四棱锥 $A-BCD$.

(1)证明:平面 $ADB\perp$ 平面 BDC;

(2)设 E 为 BC 的中点,求直线 AE 与直线 DB 所成角的余弦值.



① ②

[素养小结]

利用空间向量的坐标运算求夹角与距离的一般步骤:

(1)建系:根据题目中的几何图形建立恰当的空间直角坐标系.

(2)求坐标:①求出相关点的坐标;②写出向量的坐标.

(3)论证、计算:结合公式进行论证、计算.

(4)转化:转化为夹角与距离问题.

拓展 [2024·杭州二中高二期中] 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 是底面 $ABCD$(含边界)上一动点,满足 $A_1P\perp AC_1$,则线段 A_1P 长度的取值范围是 ( )

A. $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$

C. $[1,\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$